I. N. J.

DISSERTATIO

DE

TRAJECTORIIS,

QUAS DESCRIBIT CORPUS A DUABUS SIMUL VIRIBUS IN MEDIO NON RESISTENTE MOTUM,

Cujus

PARTEM PRIOREM,

CONSENTIENTE AMPLISS. SENATU PHILOS. IN REGIA ACADEM. ABOËNSI,

Publico examini subjiciunt

JOHANNES BILMARK,

FACULT. PHIL. ADJUNCTUS,

ET

STIPENDIARIUS REGIUS,

SVENO NYBELIN,

SMOLANDUS.

Die XXVI. Februar. Anni MDCCLVII.

L. H. Q. A. M. C.

ABOÆ, Impressit Direct. & Typogr. Reg. Magn. Duc. Finland. JACOB MERCKELL.

S:Æ R:Æ M:TIS
MAXIMÆ FIDEI VIRO,
GENERALI MAJORI, Legionis Tormentariæ CHILIARCHÆ atq; Ordinis Ensiferi EQUITI,
Perillustri ac Generosissimo Domino,

DN. AUGUSTINO EHRENSWÅRD,

MÆCENATI MAXIMO.

QUo fers, Musa, gradum? Cur sollicitare penates
Audes Heroum? Mittas conamina tanta.
Mœnia num timidis concedunt otia Musis?
Hinc tormenta boant, illinc catapulta molares
Evomit ingentes, balistaque robora jactat.
Torva suos pariter pandunt mortaria rictus,
Sulphure pascuntur, pastuque ferocia tali
Infrendent, graviterq; gemunt, crepituq; fragoso
Faucibus eructant calidis sua fulmina late.
Terra tremit, montesque horrent, turresque superbæ
Verticibus nutant. Totus pluit ignibus æther.
Perge tamen: nec te glandes, granatave dira,
Nec fragor aut ignes, nec plumbea grando retardent:
Nubi-

Nubibus ecce micat fumoſis gratia rara.
Magne VIR, in patriam cum ſint TUA grandia facta,
Haud fas eſt gracili modularier iſta cicuta.
Viderat in rapidis ſtatuas quas fluctibus arces
Sanguineus Mavors, mirans molimina tanta.
Cedite, ait, veterum turres, nunc cedite muri
Heſperidum celebres: nulla eſt jam gloria veſtra.
Dein ſtupuit viſis; rabida at mox intonat ira:
Svethica ſic tellus noſtros cohibere furores
His ſatagit; nil huic acies, nil tela nocebunt.
Plura locuturum, rabieque minisque frementem
Continuit Pallas, ſævosque ita temperat æſtus:
Siſte truces rugas, capulum ne tange cruentum,
Has mihi delegi terras, propriasque dicavi,
Otia concedam nullo temeranda tumultu.
Ille Heros, cujus merito mirare labores,
Martia facta probat, juſtis gaudetque tropæis;
Sed fovet & Muſas. Atque ut ſua cura Matheſis;
Ipſe Mathematicis nuper nova fata paravit.
Vocibus allectus Divæ TIBI, noſter Achilles,
Suſtinui ſupplex incomtas tradere curvas;
Quas placidus capias, numeros nutuque favente
Digneris noſtros. Tempus ſic forte futurum,
Quo meliora leges, ac, ut puto, lecta probabis.
Vivas, Magne HEROS, per ſecula multa ſuperſtes,
Ut patriæ Muſisque Tuis des commoda mille.

Perilluſtris ac Generoſiſſimi NOMINIS TUI

cultor humillimus,

JOHANNES BILMARK.

VIRO

Nobilissimo & Amplissimo,

DN. OLAVO LUNDBLAD,

Officinarum Ferrariarum Possessori,

PATRONO INDULGENTISSIMO.

QUod tam sero, quæ diu desiderasti, effloruere solertiæ germina, non TIBI Satori, nec naturæ Auctori, sed fortunæ vagæ tribuendum est. Materies, quam TIBI dico, Mathematica de Trajectoriis, *effigiem fatorum quam optime refert. Jam enim dicendorum inertia, jam tenuitatis conscientia omnem motum denegavit; accedentibus, quæ mentem ejusque habitaculum premunt, penuriæ & egestatis molestiis, non rectas sed curvas sectata est sors mea lineas. Quid proinde mirum quod sero veniat fructus? Tandem igitur otia, quæ inde ab infantia mihi dedit favor TUUS, diu agitatus repeto. Æmulo vero gradu aras TUAS salutare mecum contendit Academica hæcce dissertatio, quæ in me tenuem, in TE Magnum sperat habere defensorem. Illam, pro more, ut sereno aspicias vultu, meque favore antiquo amplecti digneris humillime precor, dum vixero permansurus*

AMPLISSIMI NOMINIS TUI

observantissimus cultor,
SVENO NYBELIN.

I. N. J. C.

QUamvis abstractæ notiones, quæ in Mathesi occurrunt, difficiles tantum canoræque nugæ imperitis videantur; est tamen illis, haud diffitentibus meliora edoctis, suum pretium eximiusque usus, nullis unquam inscitiæ cavillationibus minuendus, nedum tollendus. Scilicet demonstrationibus Mathematicis ingenia admodum acuuntur, & insignem consequuntur maturitatem. Cum enim quantitatum proprietates diligenter ac sollicite expendimus, inque harum probationibus nihil adsumimus, nisi quod ex certis ac indubiis principiis per legitimam consequentiam fuerit deductum, sensim, & sæpe præter opinionem nostram, tantam nobis comparamus mentis aciem, ut de rebus quibusvis obviis solide judicare ac rite ratiocinari queamus. Porro, licet pauca admodum sint veritatum Geometricarum stamina, atque simplissima totius Matheseos principia; ex his tamen longæ ratiociniorum series conficiuntur, quæ non minus pulcherrima varietate, quam firmiſſimo & evidentiſſimo nexu ſui admirationem peritis injiciunt; immo non perſuadent tantum, ſed ad plenum cogunt adſenſum. Si proinde Mathematica demonſtrandi ratio etiam in aliis Philoſophiæ partibus, quantum ſubſtrata permittat materia, adhibeatur; hæ quoque eximiam & amplitudinem & certitudinem nanciſcentur. De hoc Matheſeos uſu cum perſvaſi eſſent veterum Philoſophorum multi, ad præclara in ſcientiis dogmata diſcipulos ſuos non prius admiſerunt, quam ex experientia didicerant, illos egregiam in Matheſi collocaſſe operam; quare etiam foribus auditoriorum hanc ſententiam inſcribendam curarunt: ȣ̓δεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω. Nec ab his diſſentiunt recentiores Philoſophi, neceſſitatem Matheſeos ad culturam ingenii atque aliarum ſcientiarum incrementa ſedulo urgentes. Pulchri quidem hi ſunt Matheſeos uſus, non tamen unici; quæ enim ex noſtra ſcientia in plurimis negotiis quotidie experimur commoda, plura ſunt, quam ut illis vel recenſendis hæ ſufficiant pagellæ. Curvas tantum conſideremus lineas, quarum cognitio licet maxime ſterilis vulgo habeatur; notitia tamen iſtarum neque Phyſicus neque Oeconomus facile carebit. Egregius quippe eſt *Parabolæ* uſus in Balliſticis & Catoptricis: *Ellipſeos* in motibus corporum cæleſtium determinandis: *Hyperbolæ* in follibus ligneis optimæ notæ conficiendis: *Cycloidis* in perficiendis horologiis oſcillatoriis: *Catenariæ* in fornicibus eximiæ firmitatis conſtruendis: *Spiralis*

in

in operibus Dædalicis, in pluribus machinamentis pneumaticis, & in illis denique machinis, in quibus motus inæquabilis ad æquabilem, vel contra, ſit reducendus. Quantum inſuper tam hæ quam aliæ curvæ nobis inſerviant, ſilentio jam præterimus. Hiſce tamen in medium allatis non negamus, eſſe in Matheſi inventa nonnulla, quæ ſubtilia magis quam utilia videantur; hæc autem inutilitas, quam tantopere totiesque crepant ſeveri quidam Catones, non ipſis inventis, ſed imperfectæ, quam de illorum ſive natura ſive adplicatione hactenus poſſidemus, cognitioni erit tribuenda. Quo plures igitur linearum curvarum atque figurarum quarumcunque proprietates deteguntur; eo plures etiam uſus hinc pendentes mortalibus innoteſcere ſolent. Multas proinde illarum utilitates veteribus ignotas noſtra invenit ætas; nullique dubitamus, quin poſterorum induſtria longe adhuc plures in apricum ſit productura. Interea præcipuos hos tam Matheſeos in genere, quam in ſpecie linearum curvarum uſus nobis ad alia properantibus breviter ſtrictimque indicaſſe ſufficiat; qui majorem illorum numerum deſiderat, illos conſulat auctores, qui hoc argumentum ex profeſſo tractarunt: ſi vero cui nec hi ſatisfacere queant, par omnino erit, ipſi cum ingenioſo *GALILÆO* reſpondere: *Dalle dimoſtrazioni della Geometria attenenti alle Miſure, a i peſi & a numeri, s' impara a miſurare i Goſſi, a peſar gli Ignoranti & a numerar gli uni & gli altri.*

Qui in leges virium centralium inquiſiverunt

Mathematici, in ſolutione duorum præcipue problematum generalium, cum quibus alia ſpecialia longa ſerie ſunt connexa, fuerunt occupati. In altero qværitur vis centralis, qua corpus in data curva incedens moveatur, directionibus ejusdem in dato puncto convergentibus. Contra autem, in altero problemate ex lege vis centralis cognita, invenienda eſt *TRAJECTORIA*, quam corpus projectum deſcribere debeat. Prioris reſolutionem, ſicuti calculum ſolummodo differentialem ſupponit, multi multis modis dederunt. In reſolutione autem poſterioris & apta adplicatione calculi integralis ad quascunque hypotheſes, cum variæ occurrerent difficultates, non niſi magna ſolertia ſuperandæ, illud in numerum difficiliorum problematum clariſſimi etiam Geometræ retulerunt. Acutiſſimi tamen eorum, quibus res arduæ non impedimenta, ſed totidem eſſe ſolent incitamenta, dignas duxerunt has curvas, quibus illuſtrandis multum ſtudii ac temporis impenderent. Tantam enim hæ nobis adferunt utilitatem, quantam non ſolum in antecedentibus recenſitæ, verum etiam innumeræ aliæ præſtant; quippe quæ ad ampliſſimam Trajectoriarum familiam referri poſſunt. Magnis aliorum in curvas noſtras meritis quamvis pauca tantum addere fas ſit; nemo tamen frugi ſaltim hominum inſtitutum noſtrum inutile judicabit, dum ex ſimpliciſſimis & admodum generalibus principiis doctrinam Trajectoriarum evolvimus. Cogitantes autem, quam facilis ſit lapſus in inveſtigatione

tione veritatum adeo ſublimium, a Te C. L. magnopere petimus, velis pro ea, qua es humanitate, innoxios noſtros labores meliorem in partem interpretari.

PROPOSITIO I. *Problema. Fig.* 1. & 2.

Si corpus quoddam A a duabus quibuscunque viribus, quarum directiones angulum quemcunque inter ſe comprehendant, ſimul moveatur, quam demum cunque rationem velocitates ab his viribus corpori impreſſæ inter ſe habeant; invenienda eſt æquatio generalis ad Trajectoriam, quam corpus A in medio non reſiſtenti deſcribit.

1:o In plano Trajectoriæ deſcribendæ ſit ducta recta linea AX, itemque alia recta AC; ita ut angulus CAX ſit æqualis angulo, quem directiones virium corpus A moventium inter ſe comprehendere debent. Porro, ſit BC regula quædam, quæ ita moveatur, ut ipſa, durante motu, ſit parallela ad AC & ea velocitate, quam producere valet vis ſecundum AX; atque in eadem regula BC incedat corpus A ea velocitate, quam vis ſecundum AC producit. Poſt tempus quoddam perveniat corpus A ad punctum E, atque deinde intra datum temporis momentum promoveatur regula BC per lineolam B*b*, ut ſitum *b*C habeat, atque eodem inſtanti moveatur corpus A in regula dicta per lineolam EP. Per E ducatur recta E*p* parallela ad AX occurrens *b*C in puncto *p* & compleatur parallelogrammum EP*pe*, ducaturque diagonalis E*e*.

Quoniam itaque lineæ Ep & EP sunt infinite parvæ, motus per illas æquabilis censeri potest; adeoque in puncto E est velocitas regulæ BC ad velocitatem corporis in ipsa incedentis, sicut Ep est ad EP (velocitates enim sunt inter se sicut spatia eodem tempore ac motu æquabili descripta, *per princ. Mechan.*). Quamobrem etiam corpus A per concursum virium secundum AX & BC agentium eodem tempore absolvet diagonalem Ee, quo a qualibet vi seorsim actum percurrisset Ep & EP (*per princ. Mechan.*); ac proinde Ee erit unum Trajectoriæ elementum. Porro in E sit v velocitas, corporis secundum BC, & z velocitas, qua defertur secundum AX; erit per demonstrata $z : v :: Ep : EP$, & consequenter $v. Ep = z. EP$. Producantur pE & eP donec occurrant AC in punctis M & m. Igitur, si AM & ME ponantur coordinatæ in Trajectoria AEF, erunt EP & Ep harum differentialia. Sit abscissa $AM = x$ & semiordinata $ME = y$; erit EP $= Mm = dx$, & $Ep = Pe = dy$; atque his valoribus in æquatione modo inventa $v. Ep = z. EP$ substitutis, erit $vdy = zdx$, & $dy = zdx : v$, quæ est æquatio pro Trajectoriis, quas describit corpus a duabus quibuscunque viribus simul motum, si in quolibet Trajectoriæ puncto directio alterius vis sit parallela ad AX, alterius autem ad AC.

2:o Eodem ferme res recidit, si regula BC toto motus tempore non sit sibi ipsi parallela, sed circum datum punctum C *Fig. 2.* moveatur, seu si directiones BC, bC &c. in puncto fixo concurrant.

Ete-

Etenim ſi regula BC a vi quadam mota fuerit, atque corpus poſitum ſit in puncto regulæ M; evidens eſt, ſi regula tantum moveatur, nulla autem inſuper vis pellat corpus A verſus centrum C, quod illud deſcriberet arcum quendam circularem. Dimoveatur itaque regula a ſitu BC in alium *b*C priori infinite propinquum, & interea dum punctum M regulæ conficit arculum M*m*, corpus a vi centrali actum deſcendat in regula per lineolam MR. Centro C radiis CM & CR deſcribantur arcus circulares PM*m* & *p*R*r*, atque ducatur linea M*r*; quo facto, trapeziolum MR*rm* pro parallelogrammo rectilineo haberi poteſt. Hinc porro ſimili modo ac in *art.* 1. demonſtratur, quod velocitas corporis ſecundum arculum M*m* eſt ad velocitatem per MR ſicut M*m* ad MR; quare diagonalis M*r*, eſt unum Trajectoriæ elementum. Sit velocitas ſecundum $Mm = z$, velocitas, qua corpus urgetur verſus $C = v$, $AP = BM = x$, arcus $PM = y$; erit $MR = dx$, $Mm = dy$; & per demonſtr. $z : v :: Mm : MR :: dy : dx$; proindeque $vdy = zdx$, & $dy = zdx : v$, quæ eſt altera æquatio pro Trajectoriis, quando directiones BC, *b*C &c. in dato centro concurrunt.

3:o Si denique directiones virium in diverſis admodum punctis convergant; ex. gr. regula BC ita moveatur, ut ubique ſit perpendicularis ad datam curvam AB; quo poſito, erunt puncta concurſus directionum in curva FCL, quæ eſt Evoluta ipſius AB. A vi quacunque moveatur regula ex ſitu BC in alium *b*C priori infinite vicinum,

ac

ac interea dum punctum M corpori A in initio hujus motus suppositum conficit arculum Mm, corpus ab altera vi actum moveatur per MR; facta eadem constructione, ut in *art.* 2; erit Mr unum Trajectoriæ elementum. Sit $BM=x$, $Mm=dy$, velocitas juxta $BM=v$, & velocitas juxta $Mm=z$; erit $MR=dx$, & eodem, ut ante, modo demonstrabitur, quodjam sit $v:z::dx:dy$; adeoq; $vdy=zdx$ seu $dy=zdx:v$. Est itaque $dy=zdx:v$ æquatio Trajectoriarum generalis, adeoque si ex adsumta quacunque hypothesi in locum v & z substituantur illarum valores vel ex x & y vel ex constantibus sumti, prodibit Trajectoria in ista hypothesi. Q. E. I.

Adplicationem formulæ hujus generalis ad casus speciales per selecta exempla jam ostendemus. Notandum vero, quod v & z in sequentibus etiam sint velocitates juxta BC & AX vel Mm, nisi expresse aliud moneatur.

PROPOSITIO II. *Problema. Fig* 1.

Si corpus A juxta directionem rectæ lineæ AX projectum, motu semper æqvabili moveatur, ac interea vi gravitatis suæ descendat motu uniformiter accelerato per verticales BC, bC; invenienda est Trajectoria, quam corpus A in medio non resistenti describit, positis directionibus gravium inter se parallelis.

Quoniam corpus A secundum directionem AX motu æquabili movetur; æqualibus temporibus æqualia conficiet spatia; adeoque z erit constans, sit itaque $z=\sqrt{a}$. Porro, quoniam corpus A motu

tu

tu uniformiter accelerato descendit juxta BC; erit (*per princ. Mech.*) velocitas cadendo per BE vel AM acquisita in ratione subduplicata ipsius AM (x); adeoque $v = \sqrt{x}$. Sed (*per art.* 1. *Prop.* 1.) est $dy = zdx : v$; quare, si in locum v & z substituantur valores modo inventi, erit $dy = \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{x}} = a^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} dx$; atque sumtis integralibus $y = 2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{ax}$; ergo etiam $yy = 4ax$. Ex qua æquatione constat, quod in hypothesi *GALILÆANA* de acceleratione gravium cadentium, Trajectoria in medio non resistenti sit Parabola Apolloniana, cujus parameter est $4a$. Q. E. I.

Coroll. Parameter igitur est quadrupla altitudinis a, ex qua corpus decidere debet, ut acquirat velocitatem $\sqrt{a}$, qua vel horizontaliter vel oblique ad horizontem est projiciendum.

Propositio III. *Problema. Fig.* 1.

Iisdem positis, ac in Prop. II. hoc tantum cum discrimine, quod loco hypotheseos Galilæanæ adsumatur hypothesis motus corporum cadentium BALIANA; quæritur Trajectoria, quam corpus in medio non resistenti tum describet.

In hypothesi *BALIANA* sunt velocitates secundum directiones parallelas BC, *b*C &c. uti longitudines datis temporum intervallis confectæ, adeoque $v = x$. Porro per ea, quæ *Prop. II.* notavimus, erit $z = \sqrt{a}$. Quare cum (per art. I. prop. I.) sit $dy = zdx : v$;

sub-

substitutis in locum v & z eorum valoribus, erit $dy = \frac{dx\sqrt{a}}{x}$, & sumtis integralibus erit $y = \int \frac{dx\sqrt{a}}{x} = \sqrt{a}.\,Log.\,x$. Ex qua æquatione patet, quod abscissæ AB, Ab, &c. sint semiordinatarum BE, be &c. Logarithmi; quare Trajectoria in hocce casu evadit Logarithmica, cujus subtangens est $\sqrt{a}$. Q. E. I.

PROPOSITIO IV. *Problema.*

Retineatur hypothesis motus corporum deorsum cadentium Galilæana; sintq; directiones gravium inter se parallelæ; velocitas vero, qua corpus secundum rectam AX projicitur sit ut $\frac{(\frac{1}{2}a \mp x)\sqrt{b}}{\sqrt{(aa \mp ax)}}$; *invenienda est æquatio ad Trajectoriam, quam corpus a viribus has velocitates producentibus motum in medio non resistenti describit.*

In hypothesi Galilæana sunt velocitates corporum cadentium in ratione subduplicata altitudinum; adeoq; $v = \sqrt{x}$. Sed ex hypoth. est $z = \frac{(\frac{1}{2}a \mp x)\sqrt{b}}{\sqrt{(aa \mp ax)}}$; his igitur valoribus in locum v & z in æquatione $dy = zdx : v$ *Prop. I.* substitutis; erit $dy = \frac{(\frac{1}{2}a \mp x)dx\sqrt{b}}{\sqrt{(aa \mp ax)}\sqrt{x}} = \frac{abdx \mp 2bxdx}{2\sqrt{(aabx \mp abxx)}}$. Sumtisque integralibus, erit $y = \sqrt{\frac{(abx \mp bxx)}{a}}$, seu $yy = \frac{abx \mp bxx}{a}$; quæ æquatio est

ad

ad Ellipsin, si in ipsa adsumatur signum $-$; sed ad Hyperbolam, si ponatur $+$; in utroq; autem casu est axis vel diameter a & parameter b. Q. E. I.

COR. I. Sit $a=b$; ergo $yy=ax\mp xx$; adeoq; Trajectoria erit vel Circulus vel Hyperbola æquilatera, prout in hac æquatione obtineat vel $-$ vel $+$.

COR. II. Sit a respectu b infinita; quo posito, æquatio in hac *Prop.* inventa $yy=\frac{abx\mp bxx}{a}$, mutabitur in hanc $yy=\frac{abx}{a}$; seu $yy=bx$. Unde consequitur, partim quod Ellipses & Hyperbolæ infinitarum diametrorum abeant in Parabolas, partim etiam, quod in hoc casu corpus eodem tenore moveatur in illis, ac in his. Est enim $v=\sqrt{x}$, & ex adsumta hypoth. $z=\frac{a\sqrt{b}}{2\sqrt{aa}}=\frac{1}{2}\sqrt{b}$; quales velocitates corpori imprimentur, si Parabolam describet; uti ex aliis principiis *Prop. II.* ostendimus.

PROPOSITIO V. *Problema. Fig. 1.*

Si in quolibet Trajectoriæ puncto E sit velocitas juxta BC ad velocitatem juxta AX, uti x ad y; quæritur Trajectoria, quam corpus in medio non resistenti describit, positis directionibus BC, bC inter se parallelis.

Ex hypothesi est $v=x$, & $z=y$; quamobrem, cum $vdy=zdx$ *Prop. I.* erit $xdy=ydx$, adeoq; $xdy-ydx=0$, & sumtis integralibus $xy=aa$. Quæ æquatio est ad Hyperbolam intra asymptotos. Q. E. I.

 SCHOLION.

Scholion. Æquatio Trajectoriarum generalis, quam in Prop. I. invenimus, non ſolum ſingulas dat curvas, quæ deſcribuntur a corpore, quod movetur per concurſum duarum virium velocitatibus convenienti modo determinandis in corpus agentium; verum inſuper adſumta Curvæ cujusvis æquatione facili negotio determinantur velocitates, quæ ad talem curvam deſcribendam requiruntur. Ex data enim curvæ æquatione invenitur valor ipſius dy in dx, ac proinde hæc ipſa differentialia ex æquatione $vdy = zdx$ Prop. I. tolli poſſunt. Porro, cum ambæ v & z ſint indeterminatæ, alterutra earum z pro arbitrio determinari poteſt vel per x vel per conſtantes; quo facto, mox innoteſcet valor alterius velocitatis v. Ex quibus apparet, infinite diverſas velocitates concurrere poſſe ad eandem Trajectoriam deſcribendam. Hæc omnia allato in medium exemplo fient clariora. Sit Trajectoria Parabola Apolloniana; erit $yy = 4ax$; quare $dy = \frac{2adx}{y} = \frac{2adx}{2\sqrt{ax}} = \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$; & hoc valore in locum dy in æquatione $vdy = zdx$ ſubſtituto, erit $\frac{vdx\sqrt{a}}{\sqrt{x}} = zdx$, adeoq; $v\sqrt{a} = z\sqrt{x}$. Ponatur jam $z = \sqrt{a}$; eritq; $v = \sqrt{x}$. Sin vero $z = \sqrt{x}$, erit $v = \frac{x}{\sqrt{a}}$, & ita porro; adeo ut, ſive corpus ſimul moveatur velocitatibus $\sqrt{a}$ & $\sqrt{x}$, ſive $\sqrt{x}$ & $\frac{x}{\sqrt{a}}$, in utroq; tamen

caſu

casu parabolam describet Apollonianam, cujus parameter est $4a$.

PROPOSITIO. VI. *Problema. Fig. 2.*

Si directiones BC, bC &c. in dato centro convergant, & adsumatur hypothesis corporum cadentium Galilæana, sitq; velocitas, qua corpus in quolibet Trajectoriæ puncto M movetur secundum arculum Mm *centro C radio CM descriptum, ubiq; constans; quæritur Trajectoria, quam corpus in medio non resistenti describit, concessis figurarum quadraturis.*

Sit distantia corporis projiciendi a centro C in initio motus seu $CA = a$, & centro C radio CA describatur arcus circuli ABb, ducanturque radii infinite vicini CB, Cb, occurrentes Trajectoriæ in punctis M & r, sintq; descripti e C radiis CM & Cr arcus PMm & pRr. Sit $AP = x$, $AB = u$, $Mm = dy$; erit $CM = CP = a - x$, $MR = Pp = dx$, atque $Bb = du$. Igitur, cum sectores CBb & CMm sint similes, erit $CB : Bb :: CM : Mm$, seu $a : du :: a - x : dy = \frac{(a-x)du}{a}$. Enimvero $dy = zdx : v$ (*art.* 2. *Prop.* I.); quare etiam $\frac{(a-x)du}{a} = \frac{zdx}{v}$; ac proinde $du = \frac{azdx}{(a-x)v}$

Sit porro b altitudo, ex qua corpus decidere debet, ut acquirat velocitatem, qua deinceps æquabiliter movetur juxta quemlibet arcum Mm; erit in hypothesi Galilæana $z = \sqrt{b}$, & $v = \sqrt{BM} = \sqrt{x}$; &, his valoribus in æquatione superiori substitutis,

 erit

erit $du = \frac{adx\sqrt{b}}{(a-x)\sqrt{x}}$ & ſumtis integralibus $u = \int \frac{adx\sqrt{b}}{(a-x)\sqrt{x}}$ quæ eſt æquatio Trajectoriæ deſideratæ.

Evidens eſt, quod conſtructio hujus Trajectoriæ ſupponit quadraturam alius curvæ, quæ ſit AOG, cujus vertex eſt in A, abſciſſa AP $= x$, & ſemiordinata PO $= \frac{ab\sqrt{b}}{(a-x)\sqrt{x}} = \frac{abb}{(a-x)\sqrt{bx}}$; quippe ſi area quævis APO dividatur per b, quotus dabit arcum AB, atq; hinc innoteſcit tam poſitio radii CB, quam punctum quodvis M Trajectoriæ AMD, deſcripto arcu PM radio CP. Ut autem inveniantur puncta curvæ AOG, vertice A & parametro b deſcribatur Parabola AQ, & ducatur ſemiordinata PQ; erit hæc $= \sqrt{bx}$. Fiatq; PN tertia proportionalis ad PQ & b; erit PN $= \frac{bb}{\sqrt{bx}}$. Per A ducatur recta indefinita AT normalis in AC, & per C & N ducatur CN occurrens AT in T & compleatur parallelogrammum TAPO. Igitur cum $\triangle$CPN $\sim$ $\triangle$CAT; erit CP : PN :: CA : AT, ſive $a-x : \frac{bb}{\sqrt{bx}} :: a :$ AT $=$ PO $= \frac{abb}{(a-x)\sqrt{bx}}$ ergo O erit unum curvæ AOG punctum.

Cor. I. Sit $\frac{abb}{(a-x)\sqrt{bx}} = \infty$; eritq; $a = x$, ac proinde recta CE ducta per punctum C normalis in AC erit aſymptotos curvæ AOG.

Cor. II. Maneant omnia, ut in hac *Prop.* niſi quod directiones gravium jam ſint inter ſe parallelæ;

erit

erit a respectu $x = \infty$; adeoq; x respectu $a = 0$; quare in hoc casu est $a - x = a$, & arcus AB, PM, pr sunt lineæ rectæ. Hinc æquatio superius inventa $du = \frac{adx\sqrt{b}}{(a-x)\sqrt{x}}$ mutabitur in hanc $du = \frac{adx\sqrt{b}}{a\sqrt{x}} = \frac{dx\sqrt{b}}{\sqrt{x}} = b^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} dx = dy$, & integrando, erit $y = 2\sqrt{bx}$, ac proinde $yy = 4bx$. His itaq; sub conditionibus Trajectoria est Parabola Apolloniana, cujus parameter est $4b$. Parameter igitur est quadrupla altitudinis b, ex qua corpus decidere debet, ut acquirat velocitatem $\sqrt{b}$, qua vel horizontaliter vel oblique ad horizontem est projiciendum, quod alio modo *Prop. II.* demonstravimus.

PROPOSITIO VII *Problema. Fig. 2.*

Directiones BC, bC &c. concurrant in punctis curvæ FCL, quæ est evoluta curvæ datæ ABb, & adsumatur hypothesis motus corporum cadentium Galilæana sitq; velocitas, qua corpus in quolibet Trajectoriæ puncto movetur secundum arculum Mm, ex puncto Evolutæ C portione CM radii Evolutæ descriptum, ubique constans; quæritur Trajectoria, quam corpus in medio non resistenti describit, concessis figurarum quadraturis.

Fiat eadem Figuræ constructio, ut in *art. 3.* Prop. 1. & (per princ. Algebr.) quæratur CB radius Evolutæ in B, sitque $CB = q$, $BM = x$, $Mm = dy$; velocitas constans, qua corpus movetur per quemvis arcum Mm seu $z = \sqrt{b}$, $AB = u$; erit $CM = q - x$,

$Bb = du$, $MR = dx$, & vi hypoth. $v = \surd x$. Sed propter ſectores ſimiles CBb & CMm erit $dy = \frac{(q-x)du}{q}$. At $dy = zdx : v$ (art. 3. Prop. 1.); conſequenter erit $\frac{(q-x)du}{q} = \frac{dx\surd b}{\surd x}$; adeoq; $du = \frac{qdx\surd b}{(q-x)\surd x}$; quæ eſt æquatio Trajectoriæ deſideratæ. Q. E. I.

PROPOSITIO VIII. *Lemma. Fig.* 2.

Si corpus quoddam ſecundum rectam lineam AX *projectum motu æquabili moveatur, atq; interea, dum hanc deſcriberet, a vi quadam centripeta urgeatur verſus centrum fixum* C, *motuque hoc compoſito conficiat Trajectoriam* AMDH; *deſcripto ex centro* C *radio quodam* CM *arculo* Mm; *dico, quod in quolibet Trajectoriæ puncto* M *velocitas ſecundum arcum* Mm *erit reciproce ut radius vector* CM *hujus puncti.*

Ex *Mechanica* conſtat, quod corpus propter adſumtas conditiones ita moveatur, ut radius vector verrat areas temporibus proportionales. Si itaq; CMr & CDH ſint duo ſectores æquali tempore confecti, erit *ſect.* CMr = *ſect.* CDH. Sint hi ſectores infinite parvi, & centro C radiis CM & CD deſcribantur arculi Mm & DI; hi pro rectis lineis in Cr & CH normalibus haberi poſſunt. Ergo erit Cr. Mm = CH. DI, ſeu CM. Mm = CD. DI; adeoq; Mm: DI :: CD : CM. Enimvero motus per Mm & DI utpote lineas infinite parvas æquabilis cenſeri poteſt; ergo velocitas per Mm eſt ad velo-

citatem

citatem per DI, uti M*m* ad DI. Quare eadem velocitas per M*m* eſt ad velocitatem per DI, uti CD ad CM, id eſt, reciproce ut radius vector CM ad radium vectorem CD. Q. E. I.

PROPOSITIO IX. *Lemma. Fig. 3.*

Si corpus datum in Trajectoria AMm a duabus viribus ſimul moveatur, altera projectionis, altera autem, qua ad centrum immobile C propellitur; invenienda eſt velocitas corporis ſecundum quodvis Trajectoriæ elementum.

Sit M*m* elementum Trajectoriæ AM*m*, & MP, *mp* arcus circulares infinite vicini radiis CM & C*m* deſcripti. Porro ſit vis centralis abſoluta in puncto M $= \phi$, velocitas corporis juxta M*m* $= w$, arcus AM $= s$, CP $=$ CM $= x$, & tempus, quo conficitur AM $= t$; erit M*m* $= ds$, P*p* $=$ MR $= -dx$, differentiale temporis $= dt$, & elementum velocitatis $= \pm dw$ (obtinet autem +, cum corpus accedit ad centrum C; ſed −, cum mobile recedit ab eodem centro). Cum itaq; motus per lineolam M*m*, utpote infinite parvam, ſit æquabilis; erit $w = \frac{ds}{dt}$, ac proinde $dt = \frac{ds}{w}$.

Porro vis centralis abſoluta ϕ eſt ad vim ſecundum M*m*, ſicut M*m* ad MR :: $ds : -dx$ (*per princ. Mechan.*); ergo vis corporis juxta M*m* erit $= \frac{-\phi dx}{ds}$.

Eſt autem quantitas motus tempuſculo *dt* producta, ut vis ducta in elementum temporis (*per princ. Mech.*)

Mech.), seu ut $-\frac{\Phi dxdt}{ds}$, &, propter motus æquabilitatem tempusculo dt, erit eadem quantitas motus momentanea, uti incrementum vel decrementum momentaneum velocitatis multiplicatum per massam mobilis; adeoq; posita hac massa $=1$, habemus $-\frac{\Phi dxdt}{ds} = + dw$ (accrescit enim velocitas, prout corpus accedit ad C); ergo $dt = \frac{-dsdw}{\Phi dx}$. Sed, *per demonstrata*, est $dt = \frac{ds}{w}$, ergo erit $\frac{ds}{w} = \frac{-dsdw}{\Phi dx}$; adeoq; etiam $\Phi dx = -wdw$; & sumtis integralibus atque addita quantitate constante ex lege integrationis, erit $\int \Phi dx = ab - \frac{1}{2}ww$, seu $\int \Phi dx = ab - ww$ (quippe ab tanta adsumi potest, ut fractio $\frac{1}{2}$ tuto negligi queat); ergo erit $ww = ab - \int \Phi dx$, & $w = \sqrt{ab - \int \Phi dx}$. Q. E. I.

COR. I. Sit DHQq talis curva, ut ejusdem semiordinatæ PQ, pq &c. in lineam AC normales exprimant vires centrales absolutas in Trajectoriæ punctis M, m &c., quæ puncta inveniuntur, si ex centro C radiis CP, Cp describantur arcus PM, pm curvam AMm intersecantes; erit PQ $= \Phi$, elementum figuræ PpqQ $= -\Phi dx$, & integra area GPQD $= ab - \int \Phi dx$. Ex quibus sequitur, quod velocitas per Mm sit in ratione subduplicata areæ GPQD.

COR. II. Quoniam $w = \frac{ds}{dt}$; erit etiam $dw = \frac{dds}{dt}$, po-

posita dt constante. Sed per ea, quæ in hac *Prop.* demonstravimus, est $dw = -\frac{\phi dx dt}{ds}$; ergo erit $\frac{dds}{dt} = -\frac{\phi dx dt}{ds}$; unde hanc elicimus formulam $\phi = -\frac{ds dds}{dx dt^2}$. Quæ æquatio præter usum, quem paulo infra nobis præstabit, hunc etiam habet, quod ejus ope inveniri queat vis centralis, qua corpus in qualibet curva data incedens, ad datum ejusdem orbitæ focum vel centrum urgetur.

Propositio X. *Problema. Fig. 3.*

Sit motus projectionis æquabilis, atq; lex virium centralium data (scil. ex x *atque quantitatibus constantibus determinanda), harumque directiones in centro immobili convergant; invenienda est æqvatio ad Trajectoriam, quam corpus in medio non resistente describit, concessis figurarum quadraturis.*

Sit C focus vis centralis, a qua, cum vi projectionis juncta, dum corpus datum movetur, describit Trajectoriam AMm; sitq; A punctum illud unde motus incipit, ducta CA, centro C & radio CA describatur arcus circuli ABb. Ducantur quoq; ex centro C pro arbitrio duo radii CB, Cb, ita ut arcus Bb sit infinite parvus, qui radii secent Trajectoriam in M & m. Tum centro C radiis CM & Cm describantur arculi Mr & mR. Sit CA $= a$, AB $= u$, CM $= x$, M$r = dy$, & velocitates juxta Mm, MR Mr sint w, v, z respective; erit MR $= -dx$, B$b = du$,

 atq;

atq; obsectores CBb & CMr similes; erit CB: Bb:: CM: Mr, seu $a : du :: x : dy = \frac{xdu}{a}$.

2:o Quoniam motus projectiones est æquabilis (*ex hypoth.*); erit velocitas corporis secundum Mr ut $\frac{1}{CM}$ (*Prop. VIII.*); adeoq; $z = \frac{1}{x} = \frac{ac}{x}$, adsumta nempe c quantitate constante & arbitraria; atq; multiplicato numeratore fractionis per ac.

3:o Velocitas corporis in adsumto Trajectoriæ puncto seu velocitas per elementum curvæ M$m = w$ $= \sqrt{ab - \int \Phi dx}$ (*Prop. IX.*), posita vi centripeta absoluta in M $= \Phi$.

4:o Cum lineæ Mm, MR, Mr sint infinite parvæ, motus per illas æquabilis haberi potest. Sed mobile a viribus secundum MR & Mr agentibus simul actum eodem tempore absolvit Mm, quo seorsim percurreret MR vel Mr; quare velocitates secundum Mm, MR, Mr erunt ut hæ lineolæ. Ergo Mm: Mr:: $w : z$, & Mm^2: Mr^2:: $ww : zz$; adeoque Mm^2: M$m^2 -$ Mr^2:: $ww : ww - zz$, seu Mm^2: MR^2:: $ww : ww - zz$; ac proinde Mm: Mr:: $w : \sqrt{ww - zz}$. Cum itaq; w sit velocitas juxta Mm; erit velocitas juxta MR $= \sqrt{ww - zz} = \sqrt{ab - \int \Phi dx - \frac{aacc}{xx}} = v$, substitutis pro ww & zz eorum valoribus $ab - \int \Phi dx$ & $\frac{aacc}{xx}$ ex *art. 3. & 2.* desumtis.

5:o Cum deniq; $dy = zdx : v$ (*per Prop. I.*) & dy

in

in nostro casu sit æqualis $\frac{xdu}{a}$ (*art. 1. hujus Prop.*)
$z = \frac{ac}{x}$ (*art.* 2), $v = \sqrt{ab - \int \varphi dx - \frac{aacc}{xx}}$ (*art* 4.); his valoribus introductis, erit $\frac{xdu}{a} = \frac{acdx}{x\sqrt{ab - \int \varphi dx - \frac{aacc}{xx}}}$;

unde elicitur hæc formula $du = \frac{aacdx}{\sqrt{abx^4 - x^4\int \varphi dx - aaccxx}}$;

quæ est æquatio Trajectoriæ desideratæ, in qua quantitates variabiles x & u, atq; ipsarum differentialia legitime a se invicem sunt separata. Q. E. I.

Schol. Qui problemata Trajectoriarum hactenus solverunt Geometræ, quantum quidem nobis constat, posuerunt directiones virium centralium in unico puncto convergere. Enimvero, dum naturæ sinus excuttimus, frequentes invenimus illos casus, quibus hæ directiones in diversis concurrunt punctis. Cum enim tellus non sphæricam, sed sphæroidalem habeat figuram, qualis ferme oritur, si semi-Ellipsis circum axem minorem volvatur, & insuper gravia (*per experient.*) cadant perpendiculariter ad suum horizontem; evidens est, quod directiones gravium revera in diversis concurrant punctis, quæ in Evoluta Ellipseos sunt disposita. Porro, licet corpora non gravia in medio non resistente projecta motu uniformi ac rectilineo moveri debeant (*Lex Nat.* 1.); nihil tamen impe-

 dit,

dit, quominus corpus projectum, saltim cogitatione, concipi queat, motu inæquabili moveri. Si jam directiones virium centralium in diversis concurrant punctis, & vis projectionis utcunque variabilis existat, modo velocitates, quas vires moventes corpori imprimunt, sint singulæ vel per x vel per constantes determinabiles; æquatio ad Trajectoriam eodem modo invenitur, ac in *Prop. VII.* Sin vero velocitates non fuerint determinabiles, acquiescendum formula generali in *Prop. I.* inventa. Quæ si minus commoda aut fœcunda in præsenti negotio cui videatur, juvabit aliam æque generalem nec inelegantem hic subnectere.

PROPOSITIO XI. *Problema. Fig. 4.*

Sit ABb curva quæcunq; ex. gr. portio Ellipseos (quicquid autem de Ellipsi jam demonstrabitur, idem pari ratione aliæ cuidam curvæ adplicari potest); sintq; virium centralium directiones BC, bC &c. perpendiculares ad Ellipsin in punctis B & b, quæ concurrent supra curvam FCG, quæ est Evoluta Ellipseos ABb, sitq; data lex virium centralium (quippe ex x *atq; quantitatibus constantibus iterum determinanda); invenienda est æquatio ad Trajectoriam, quam mobile utcunq; projectum in medio non resistente describit, concessis figurarum quadraturis.*

1:o Sit AM*m* Trajectoria, in qua vires centrales tendunt ad puncta curvæ FCG, Evolutæ Ellipseos. Sit DM radius evolutæ in puncto M, MN tangens ejusdem puncti, & AG pars axis Ellipseos.

Ca-

Capiatur Mm elementum Trajectoriæ, ducanturq; Cm & Dm, atq; centris C & M radiis CM & Mm describantur arculi MR & mI. Dein ducatur mE parallela ad BC, & ex puncto B demittatur BK normalis in axem AG. His factis, sit axis Ellipseos $= 2a$, parameter $= b$, AK $= z$, CM $= x$, AB $= u$, DM $= r$, AM $= s$, vis centralis absoluta ex M versus C $= \phi$, MR $= dy$, momentum temporis, quo corpus conficit elementum curvæ $Mm = dt$; erit mR $= dx$, Bb $= du$, $Mm = ds$, atq; vi eorum, quæ demonstravit Illustr. Marchio *De L' HOPITAL* in libro *Analyse des infiniment petits* p. m. 87. erit in nostro casu CB $=$

$$\frac{\left((aabb - 2abbz + bbzz + 4aabz - 2abzz) \times \sqrt{(aabb - 2abbz + bbzz + 4aabz - 2abzz)}\right)}{2a^3bb}$$

2:o Quod si corpus projectum a nulla vi centripeta in M fuisset sollicitatum, motum suum continuasset ex M juxta tangentem MN. Sed corpus in curva AMm incedens jam retrahitur a Tangente MN per vim, cujus directio est parallela ad MC, adeoq; Em est spatium, quod corpus tempusculo dt per vim centralem ϕ conficit. Porro, cum vis centralis tempusculo dt in corpus agens supponi queat uniformiter sese habere, erunt spatia confecta sicut producta ex hac vi uniformi in quadrata temporum (*per princ. Mech.*); ac proinde $Em = \phi dt^2$; adeoq; $\phi = \frac{Em}{dt^2}$. Est autem insuper $\triangle MDm \backsim \triangle Mml$; er-

go

go DM : Mm :: Mm : ml, seu $r : ds :: ds : ml = \frac{ds^2}{r}$.
Porro est △MRm ∽ △Eml; adeoq; erit MR : Mm :: ml : mE, hoc est $dy : ds :: \frac{ds^2}{r} : mE = \frac{ds^3}{rdy}$; quare cum $\phi = \frac{Em}{dt^2}$; erit etiam $\phi = \frac{ds^3}{rdydt^2}$

3:o His ita inventis, observandum, quod, cum neutra quantitatum dx aut dy constans supponi queat, erit DM $(r) = \frac{(xdx^2 + xdy^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dy^3 + dx^2dy - xdyddx + xdxddy}$; sicut in doctrina de Evolutis curvarum demonstrari solet. Si igitur in æquatione $\phi = \frac{ds^3}{rdydt^2} = \frac{(dx^2+dy^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{rdydt^2}$ (*art. 2. hujus Prop.*) pro r substituatur valor ejusdem modo inventus; habebimus $\phi = \frac{dy^3 + dx^2dy - xdyddx + xdxddy}{xdydt^2}$; proinde etiam $\phi dxdt^2 = \frac{dxdy^3 + dx^3dy - xdxdyddx + xdx^2ddy}{xdy}$; consequenter $\frac{2\phi dxdt^2}{xxdy^2} = \frac{2dxdy^3 + 2dx^3dy - 2xdxdyddx + 2xdx^2ddy}{x^3dy^3} = \frac{2dx}{x^3} + \frac{2dx^3dy - 2xdxdyddx + 2xdx^2ddy}{x^3dy^3}$. Ut posterius membrum hujus æquationis aliquanto simplicius evadat, quo appareat utrum illud integrabile sit, nec ne, ponatur $-\frac{dx^2}{xxdy^2} = v$; & differentietur hæc æquatio,

sicque

ſicq; obtinebimus $\frac{2dx^3dy - 2xdxdyddx + 2xdx^2ddy}{x^3dy^3} = dv.$

Quamobrem cum *per demonſtrata* ſit $\frac{2\Phi dxdt^2}{xxdy^2} = \frac{2dx}{x^3}$ $+ \frac{2dx^3dy - 2xdxdyddx + 2xdx^2ddy}{x^3dy^3};$ erit etiam $\frac{2\phi dxdt^2}{xxdy^2}$ $= \frac{2dx}{x^3} + dv.$ Capiantur integralia ſingulorum terminorum; quo facto, erit $2\int\frac{\phi dxdt^2}{xxdy^2} = -\frac{1}{xx} + v + ab$ (addita ſcilicet quantitate conſtante ab) $= ab - \frac{1}{xx} - \frac{dx^2}{xxdy^2} = ab - \frac{(dx^2 + dy^2)}{xxdy^2}.$ Et hinc porro elicimus $abxxdy^2 - dx^2 - dy^2 = 2xxdy^2\int\frac{\phi dxdt^2}{xxdy^2}$; ac proinde erit $dy^2 = \frac{aaccdx^2}{abxx - xx\int\frac{\Phi dxdt^2}{xxdy^2} - aacc}$, nimirum ab tanta adſumitur, ut numerus 2 in ſecundo denominatoris termino omitti queat, & $aacc$ quantitas conſtans introducitur, ut termini fiant homogenei; ergo erit $dy = \frac{acdx.}{\sqrt{abxx - xx\int\frac{\phi dxdt^2}{xxdy^2} - aacc}}$

4:o Cum CB ſit radius Evolutæ in B, elementum

tum Ellipſeos B*b* haberi poteſt pro arcu circuli radio CB deſcripto; adeoque ſectores CB*b* & CMR ſunt ſimiles; quare CM: MR:: CB: B*b* ſeu $x : dy ::$ CB: $du = \frac{CB.dy}{x}$. Sed *per art.* 3. *hujus Prop.* eſt

$$dy = \frac{acdx;}{\sqrt{abxx - xx\int\frac{\Phi dxdt^2}{xxdy^2} - aacc}}$$ ac proinde poſt debitam ſubſtitutionem prodibit $du =$

$$\frac{\left(\frac{(aabb - 2abbz + bbzz + 4aabz - 2abzz) \times}{\sqrt{(aabb - 2abbz + bbzz + 4aabz - 2abzz)}}\right) \times acdx}{2a^3bb\sqrt{abx^4 - x^4\int\frac{\Phi dxdt^2}{xxdy^2} - aaccxx}}$$

quæ eſt æquatio ad Trajectoriam, quam corpora utcunque projecta deſcribunt, ſi virium centralium directiones concurrant in punctis curvæ FCG. Q. E. I.

Cor. I. Sit AB arcus circuli, erit $2a = b$, & poſt debitam reductionem BC $= a$, radiique omnes in centro unico C concurrunt; ergo habemus $du = \frac{aacdx,}{\sqrt{abx^4 - x^4\int\frac{\Phi dxdt^2}{xxdy^2} - aaccxx}}$ quæ eſt æquatio pro Trajectoriis, quando directiones virium centralium in puncto fixo concurrunt, quamcunque rationem tempora motus inter ſe habeant.

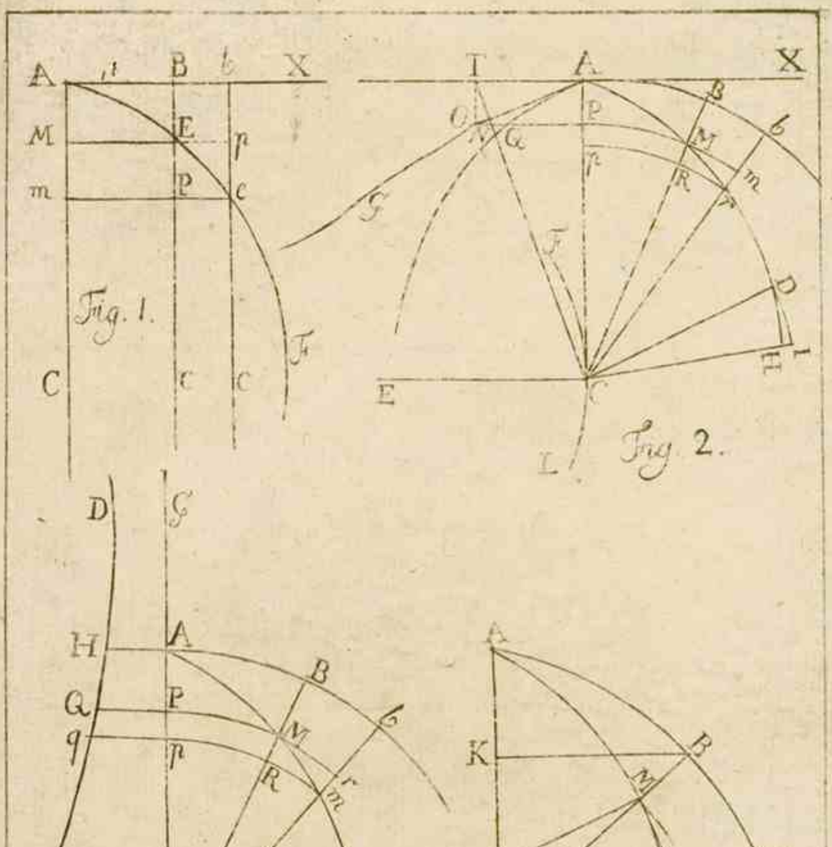
Schol.

SCHOL. Æquationem pro Trajectoriis in COR. *præcedenti* inventam, etiam ope COR. *II. Prop. IX.* obtinemus. Est enim vi COR. modo citati $\phi = -\frac{dsdds}{dxdt^2}$ adeoque $\phi dxdt^2 = -dsdds$; & $\frac{2\phi dxdt^2}{xxdy^2} = -\frac{2dsdds}{xxdy^2}$. Sed $ds = \surd(dx^2 + dy^2)$; quare, posita dy constante, erit $dsdds = dxddx$. Ergo $\frac{2\phi dxdt^2}{xxdy^2} = -\frac{2dxddx}{xxdy^2}$; sumtisque integralibus & loco dx^2 posita ds^2 in ultimo termino; erit $\frac{2\int\phi dxdt^2}{xxdy^2} = -\frac{ds^2}{xxdy^2} + ab = ab - \frac{(dx^2+dy^2)}{xxdy^2}$; ideoq; $abxxdy^2 - 2xxdy^2\frac{\int\phi dxdt^2}{xxdy^2} - aaccdy^2 = aaccdx^2$; ex qua æquatione elicimus $dy = \frac{acdx}{\sqrt{abxx - xx\frac{\int\phi dxdt^2}{xxdy^2} - aacc}}$ adsumta iterum ab tanta, ut numerus 2 in sequenti termino negligi queat. Sed $du = \frac{ady}{x}$; adeoque $du = \frac{aacdx}{\sqrt{abx^4 - x^4\frac{\int\phi dxdt^2}{xxdy^2} - aaccxx}}$ ut in COR. *præcedenti* invenimus.

COR. II. Sit $dt = xdy$, hoc est, radius vector verrat areas temporibus proportionales; erit $dt^2 = xxdy^2$,

$xxdy^2$, ac $\frac{\Phi dxdt^2}{xxdy^2} = \phi dx$. Igitur, si AB sit portio Ellipseos, & radius osculi in illa sit $= q$; erit (*per Prop. nostram*) $du = \frac{acqdx.}{\sqrt{abx^4 - x^4\int\phi dx - aaccxx}}$ Sed si AB sit portio circuli erit (*per* Cor. *I. & Scholion annexum*) in hocce casu $du = \frac{aacdx,}{\sqrt{abx^4 - x^4\int\phi dx - aaccxx}}$ quæ posterior æquatio eadem prorsus est cum illa, quam sub iisdem conditionibus in *Prop. X.* invenimus.

S. D. A. G.



I. H. Seeliger Sculps.